

Wat maakt een probleem moeilijk (of makkelijk)?

Iris van Rooij, docent KI, RU Nijmegen, i.vanrooij@donders.ru.nl
Donders Institute for Brain, Cognition and Behaviour

Many real-world problems are computationally intractable (or NP-hard), which means that no machine or mind can find the best (optimal) strategy, even if one exists. ... Intractable problems defy optimizing and make satisficing solutions necessary for both mind and machine (Gigerenzer, 2008).

... any processor that had to access the full set of the agent's background beliefs ... would be faced with an unmanageable combinatorial explosion. (Carruthers, 2003)

Er is een bepaald soort moeilijke problemen dat een belangrijke rol speelt in debatten in de cognitiewetenschap. Dit zijn de zogeheten *NP-moeilijke* problemen. Deze problemen hebben de eigenschap dat de tijd die nodig is om ze op te lossen exponentieel groeit met de grootte van de *input* (ofwel begintoestand) van het probleem.¹ Omdat een exponentiele groei snel astronomische omvang kan aannemen worden NP-moeilijke problemen ook wel computationeel 'onhandelbaar' genoemd (Engels: *intractable*).

Neem bijvoorbeeld het handelsreizigersprobleem. In dit probleem is het de bedoeling een zo kort mogelijke route te vinden tussen alle steden die de handelsreiziger wil bezoeken. Een gegeven input voor het handelsreizigersprobleem bestaat uit een n aantal steden met hun paarsgewijze afstanden. Een exponentieel algoritme voor dit probleem heeft een tijd van orde 2^n nodig om een handelsreizigersprobleem op te lossen. Dit is nog te doen als het aantal steden niet zo groot is, maar de tijd die nodig is voor het vinden van de juiste oplossing rijst snel de pan uit voor meer steden. Bijvoorbeeld, voor 10 steden is de benodigde tijd niet meer dan een paar seconden. Voor 100 steden loopt de tijd al op naar een aantal eeuwen. En voor 1000 steden is er meer tijd nodig dan er verstreken is sinds het ontstaan van het universum.

¹ Hierbij wordt er altijd de wiskundige aanname gemaakt dat $P \neq NP$; Zie het artikel "P is NP or not NP, that is the question" van Julia Meuwese in De Connectie van Juli 2005 voor een uitleg van de wiskundige achtergrond van deze aanname.

Belang voor de Cognitiewetenschap

NP-moeilijkheid wordt in de cognitiewetenschappelijke literatuur geregeld gebruikt als argument voor of tegen iets.² Ik geef hier drie voorbeelden ter illustratie.

In navolging van ideeën van de econoom en onderzoeker in de Kunstmatige Intelligentie Herbert Simon in de jaren 50, en de filosoof Christopher Cherniak in de jaren 80, wordt NP-moeilijkheid soms gebruikt als verklaring van het fenomeen dat mensen in hun oordeelvorming en keuzegedrag systematisch de regels van de logica en kanstheorie schenden.³ Het argument gaat ongeveer als volgt: Als mensen zouden denken volgens de regels van de logica en kanstheorie, dan zouden zij regelmatig voor NP-moeilijke problemen gesteld worden en die oplossen; het is niet aannemelijk dat mensen in redelijke tijd NP-moeilijke problemen kunnen oplossen; ergo, mensen moeten wel afwijken van de regels van de logica en kanstheorie.

Een sterk gerelateerd argument is dat de rationele of optimalisatiemodellen van menselijke cognitieve processen—zoals bijvoorbeeld de tegenwoordig zeer populaire Bayesiaanse modellen— NP moeilijk zijn, en dus bij voorbaat onrealistisch voor hoe mensen werkelijk denken. Dit argument wordt onder andere gemaakt door de besliskundige Gerd Gigerenzer en zijn collega-onderzoekers van het Max Planck Instituut in Berlijn. Deze onderzoekers geven heuristische en satisficing⁴ modellen als veel aannemelijker.

NP-moeilijkheid wordt ook gebruikt als argument vóór een modulaire architectuur van het brein, en daarmee tégen een niet-modulaire architectuur. Dit standpunt is gebaseerd op het volgende argument: Als het brein een niet-modulaire architectuur zou hebben, dan zouden alle processen in het brein toegang hebben tot informatie over alle andere processen in het brein; dit zou leiden tot een zogeheten *combinatorische explosie* van achtergrondinformatie, wat een NP-moeilijk probleem zou impliceren; het is, zoals gezegd, niet aannemelijk dat mensen NP-moeilijke problemen oplossen; ergo, het brein is modulair.

Deze voorbeelden illustreren hoe het concept 'NP-moeilijkheid' een centrale rol speelt in een aantal belangrijke debatten in de cognitiewetenschap. De vraag die ik hier zal belichten is welke vooronderstellingen er gedaan worden in deze debatten over wat een probleem NP-moeilijk maakt, en daarmee ook welke aanpassingen van een NP-moeilijk probleem verondersteld worden het makkelijk te

² Hierbij moet opgemerkt worden dat het soms slechts de veronderstelling betreft dat een probleem NP-moeilijk is, zonder dat er daarvoor een bewijs is geleverd. NP-moeilijkheid van een probleem is namelijk alleen via wiskundig bewijs vast te stellen.

³ Voor een klassieker over dit onderwerp, zie Kahneman *et al.* (1982).

⁴ De term *satisficing* werd door Herbert Simon geïntroduceerd als tegenhanger van *optimising*. In satisficing wordt eerst bepaald wat voor type oplossing goed genoeg (ofwel: *satisfactory*) is, en wordt er vervolgens naar een dergelijke oplossing gezocht.

maken.⁵ De juistheid van deze vooronderstellingen is immers cruciaal voor de argumenten die in deze debatten aangevoerd worden.

Misvattingen over NP-moeilijkheid

Er doen nogal wat mythen de ronde over de oorzaken van NP-moeilijkheid:

1. Optimalisatie maakt problemen moeilijk.
2. Satisficing maakt problemen makkelijk.
3. Grote zoekruimtes maken problemen moeilijk.
4. Het gebruik van heuristieken maakt problemen makkelijk.
5. De eis van exacte oplossingen maakt problemen moeilijk.
6. Bij benadering oplossen maakt problemen makkelijk.

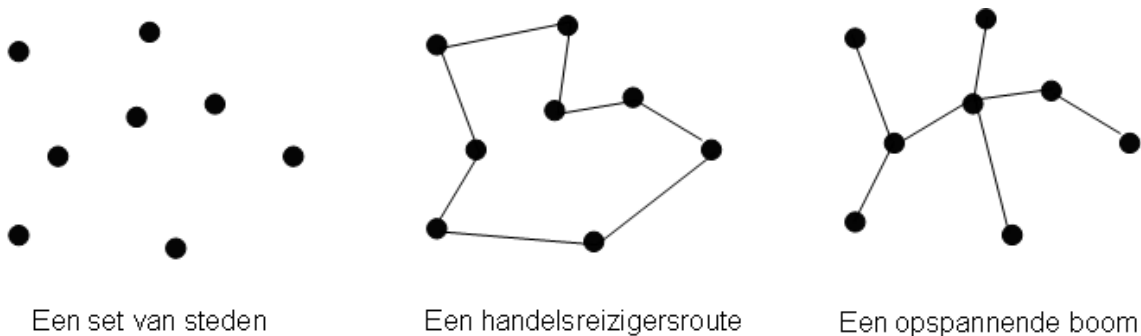
Ik zal uitleggen waarom al deze stellingen een problematisch karakter hebben en niet algemeen geldend zijn. Na afloop zal ik een alternatief bieden. Dat wil zeggen, ik zal een raamwerk voorstellen waarin we op een zinvolle manier de vraag ‘Wat maakt een NP-moeilijk probleem moeilijk (of makkelijk)?’ kunnen beantwoorden.

Mythe 1: Optimalisatie is moeilijk

Een standpunt dat regelmatig verdedigd wordt door tegenstanders van rationele of optimalisatiemodellen van cognitieve processen, is dat optimalisatieproblemen inherent moeilijk zijn. Het argument wordt over het algemeen met voorbeelden onderbouwd, bijvoorbeeld als volgt: Het handelsreizigersprobleem is een optimalisatieprobleem, want het doel is om een *optimale* route te vinden (‘optimaal’ betekent in dit geval ‘het kortste’); het is bekend dat het handelsreizigersprobleem—net als honderden andere optimalisatieproblemen—NP-moeilijk is; ergo, optimalisatie is moeilijk.

Het argument is eenvoudig te weerleggen. Er zijn heel veel optimalisatieproblemen die makkelijk zijn. Neem bijvoorbeeld het minimaal opspannende boom probleem. Dit is het probleem waarbij een aantal steden met elkaar verbonden dient te worden in een boomstructuur (zie Figuur 1) en daarbij de totale lengte van de takken van de boom te minimaliseren. Dit probleem lijkt een beetje op het handelsreizigerprobleem, en is ook een optimalisatieprobleem. Echter, in tegenstelling tot het handelsreizigersprobleem, is het minimaal opspannende boom probleem—net als honderden andere optimalisatieproblemen—makkelijk op te lossen en dus niet NP-moeilijk.

⁵ We zullen voor het gemak problemen die niet NP-moeilijk zijn ‘makkelijk’ noemen. Dit is vanzelfsprekend een simplificatie, omdat problemen om veel verschillende redenen moeilijk kunnen zijn. De simplificatie lijkt in de context van dit artikel gerechtvaardigd, omdat we hier enkel en alleen geïnteresseerd zijn in ‘moeilijkheid’ in de zin van ‘NP-moeilijkheid.’



Figuur 1. Illustraties van het handelsreizigersprobleem en het minimaal opspannende boom probleem.

Mythe 2: Satisficing is makkelijk

Een tegenwerping op bovenstaande zou kunnen zijn: ‘Ok, niet alle optimalisatieproblemen zijn even moeilijk, en sommige blijkbaar zelfs makkelijk, maar een niet-optimale (bijv. *satisficing*) oplossing zoeken is in ieder geval wel altijd makkelijker!’ Hoe aannemelijk de tegenwerping misschien ook is, het klopt niet met de wiskundige feiten. Neem bijvoorbeeld de volgende variant van het handelsreizigersprobleem: Zoek voor een aantal steden een route die alle steden bezoekt en niet langer is dan s , waarbij s het satisficing criterium is dat bepaalt welke lengte ‘goed genoeg’ is. Het is bekend dat deze variant van het handelsreizigersprobleem ook NP-moeilijk is. Hetzelfde geldt voor satisficing varianten van een heleboel andere optimalisatieproblemen. Satisficing *an sich* is dus duidelijk niet makkelijk.

Mythe 3: Grote zoekruimtes zijn moeilijk

De moeilijkheid van NP-moeilijke problemen wordt vaak geweten aan het feit dat de zoekruimte voor mogelijke oplossingen een combinatorische explosie vertoont. Dit zie je ook bij het handelsreizigersprobleem. Voor n steden bestaan er $(n - 1)!/2$ verschillende routes. Dat betekent dat er slechts twaalf verschillende routes voor vijf steden bestaan, maar het aantal groeit snel uit tot 10^{16} routes voor 20 steden (meer dan het aantal neuronen in het brein), 10^{30} routes voor 30 steden (meer dan het aantal seconden sinds de *Big Bang*), en 10^{88} routes voor 65 steden (meer dan het aantal atomen in het universum). Het is onhaalbaar om alle mogelijk routes na te gaan om de kortste te vinden, zelfs voor problemen van beperkte grootte. De conclusie lijkt snel getrokken dat de grootte van de zoekruimte de oorzaak is van de NP-moeilijkheid van het handelsreizigersprobleem. Deze conclusie gaat echter voorbij aan het feit dat een grote zoekruimte geen voldoende voorwaarde is voor NP-moeilijkheid.

Dit is weer gemakkelijk te illustreren aan de hand van een voorbeeld. Het minimaal opspannende boom probleem heeft een zeker zo grote zoekruimte als het handelsreizigersprobleem. De reden daarvoor is dat er véél meer mogelijkheden zijn n steden in een boomstructuur te verbinden dan dat er mogelijkheden zijn om ze te verbinden tot een pad, ofwel route (een pad is immers slecht één mogelijke boom, eentje zonder vertakkingen). Ondanks het feit dat de zoekruimte van het minimaal opspannende boom probleem dus groter is dan die voor het handelsreizigersprobleem, is de laatste NP-moeilijk maar de eerste niet.

Een grote zoekruimte maakt een probleem dus niet *per se* moeilijk. Het gaat er eerder om of er een manier bestaat om het probleem op te lossen zonder de hele zoekruimte (of een exponentieel groot deel daarvan) te hoeven doorzoeken. Dit is blijkbaar wel mogelijk voor het minimal opspannende boom probleem, maar niet voor het handelsreizigersprobleem.

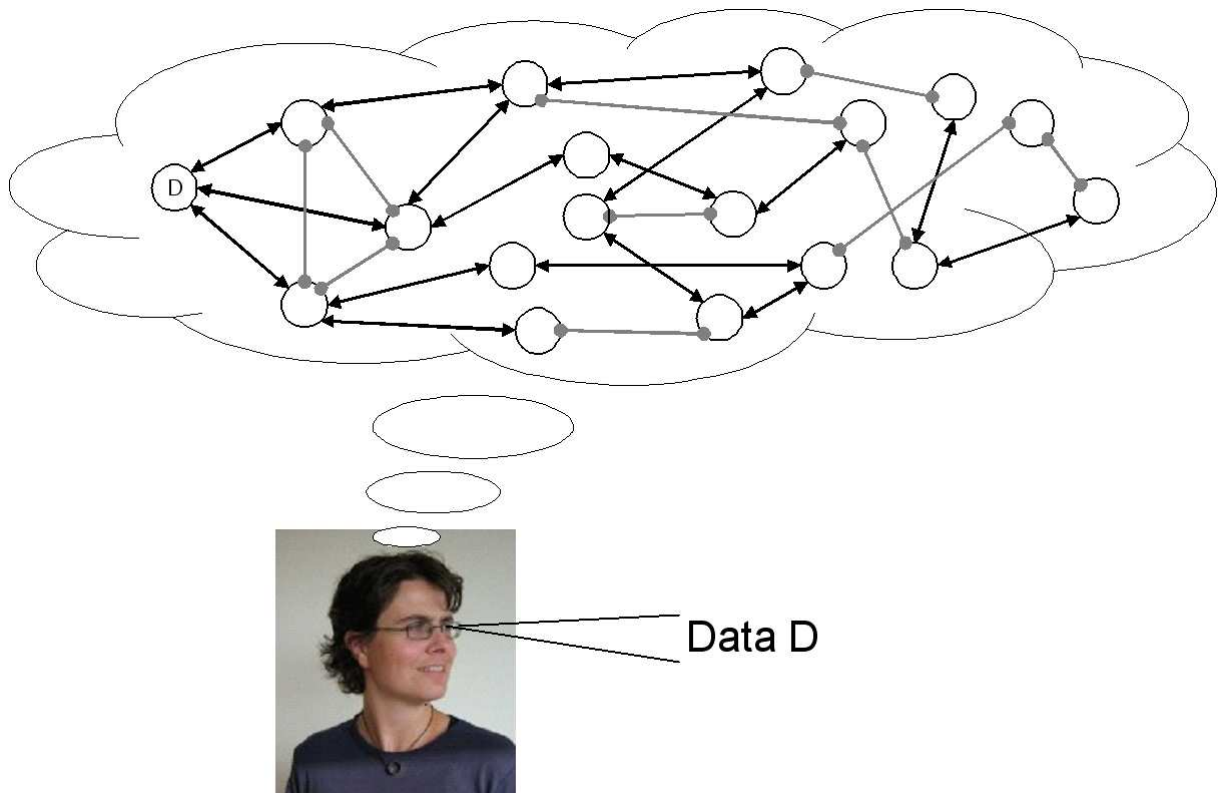
Mythe 4: Heuristieken zijn makkelijk

Als het gaat om zoekruimtes selectief te doorzoeken, dan wordt er ook vaak van 'heuristieken' gesproken. Dit zijn zoekalgoritmen die gebruik maken van vereenvoudigende aannames of 'vuistregels' bij het zoeken naar een oplossing. Heuristieken garanderen niet dat ze de juiste oplossing vinden, maar worden wel geacht die soms te vinden, of in ieder geval vaker dan een willekeurige gok. Gezien de aard van heuristieken wordt soms de veronderstelling gedaan dat alle heuristieken makkelijk zijn, in die zin dat ze niet zelf ook NP-moeilijk kunnen zijn. Dit blijkt niet het geval.

Om dit toe te lichten stappen we over op een ander soort probleem, een probleem dat model staat voor een aspect van het menselijk denken. Dit is het probleem waarbij men moet bepalen wat men allemaal gelooft na het doen van nieuwe observaties. Stel je hoort dat een medestudent met de opleiding KI is gestopt omdat zij de studie weinig uitdagend vond. Bij het horen van deze informatie pas je mogelijk je ideeën over de persoon en/of de opleiding aan. Maar hoe doe je dat op een manier zodat je ideeën precies kloppen met de werkelijkheid? Er bestaat geen enkel algoritme dat precies de juiste oplossing geeft—dat wil zeggen, precies bepaalt wat wel en niet waar moet zijn gegeven de 'data'—omdat er altijd meerdere geloofsfixaties logisch consistent kunnen zijn met wat je observeert (denk bijvoorbeeld aan het feit dat de grote variatie in flora en fauna of deze planeet voor sommigen een reden is om te geloven in God terwijl anderen geloven dat het een bijproduct is van evolutie). Volgens coherentisten maken mensen bij het bepalen van geloofsfixaties gebruik van een heuristiek die de combinatie van ideeën die het meest coherent is met de data voor waar aanneemt. Deze heuristiek is ook

vormgegeven in een model door de filosoof Paul Thagard als een *constraint satisfaction problem* (CSP).

Het CSP-model gaat ervan uit dat het menselijke brein een netwerk van deels samenhangende en deels tegensprekende ideeën implementeert. Twee ideeën in het netwerk die met elkaar samenhangen zijn verbonden door een 'positieve verbinding', en twee ideeën die elkaar tegenspreken zijn verbonden door een 'negatieve verbinding'. Een positieve verbinding representeert een *bepanking* waarvan we zeggen dat hij *gerespecteerd* wordt als de verbonden ideeën dezelfde waarheidswaarde worden toegekend (dat wil zeggen, beiden 'waar' of beiden 'onwaar'), en een negatieve verbinding representeert een beperking die gerespecteerd wordt als de verbonden ideeën verschillende waarheidswaarden worden toegekend (dat wil zeggen, de ene 'waar' en de andere 'onwaar'). De meest coherente geloofsfixatie is volgens het CSP-model een combinatie van waarheidswaarden die het maximale aantal beperkingen respecteert. Ondanks de heuristische status van coherentie voor het oplossen van het geloofsfixatieprobleem is bekend dat het CSP-model NP-moeilijk is. Dit illustreert dat niet alle heuristieken makkelijk zijn.



Figuur 2. Een illustratie van het CSP-probleem als model voor geloofsfixatie: Bij het doen van observaties ('data') worden waarheidswaarden ('waar' of 'onwaar') aan de knopen in het ideeën netwerk toegeschreven die tesamen leiden tot de grootste interne

coherentie. Het ideeën-netwerk bestaat uit knopen (= ideeën), waarvan sommige ideeënpaaren verbonden zijn door positieve verbindingen (= samenhangende ideeën; in groen aangegeven) of negatieve verbindingen (= elkaar tegensprekende ideeën; in rood aangegeven). De verbindingen representeren *beperkingen* die maximaal *gerespecteerd* worden door de meest coherente geloofsfixatie.

Mythe 5: Exactheid is moeilijk

Sommige lezers halen misschien hun wenkbrauwen op bij het idee dat het CSP-model een heuristiek zou zijn. Een argument zou als volgt kunnen gaan: Een heuristiek is een procedure die ergens ook steken laat vallen; het is natuurlijk NP-moeilijk om een geloofsfixatie te vinden die alle beperkingen respecteert, maar het is aannemelijker dat mensen een oplossing vinden die wel veel maar niet alle beperkingen respecteert; in dat geval is CSP veel makkelijker.

Er wordt wel vaker gesuggereerd dat het zoeken naar een exacte oplossing voor een probleem een oorzaak zou zijn van NP-moeilijkheid. Toch gaat er in de redenering iets mis. Het vinden van een geloofsfixatie die alle beperkingen respecteert (of bepalen dat die niet bestaat) is helemaal niet NP-moeilijk. Het is zelfs heel makkelijk. Een algoritme dat het werk doet, heeft niet meer nodig dan een tijdspanne die lineair is in het aantal verbindingen in het netwerk. De moeilijkheid komt in CSP pas om de hoek kijken als het niet mogelijk is om alle beperkingen te respecteren.

Mogelijk zijn bovenstaande observaties tegenintuïtief. Des te belangrijker is het dat we intuïtie niet als enige leidraad gebruiken bij het vaststellen of een probleem wel of niet NP-moeilijk is.

Mythe 6: Benadering is makkelijk

De laatste mythe die ik hier bespreek is het wijdverbreide idee dat NP-moeilijk problemen makkelijk zouden zijn als je ze slechts bij benadering zou hoeven op te lossen. In dat geval zou de gevonden oplossing niet precies gelijk hoeven te zijn aan de correcte oplossing, maar er alleen maar op hoeven lijken. Hier is het cruciaal wat we precies bedoelen met 'lijken op'. In de cognitiewetenschappelijke literatuur wordt de betekenis hiervan zelden geëxpliciteerd. Vele interpretaties zijn mogelijk. Ik bespreek hier één mogelijk interpretatie.

Neem bijvoorbeeld weer CSP als coherentiemodel. Een oplossing voor dit probleem is een geloofsfixatie. Zo'n geloofsfixatie kunnen we modelleren als een reeks van waarheidswaarden die mentaal toegeschreven worden aan een set van proposities of ideeën. Stel nu dat G_{opt} de geloofsfixatie is die het meest coherent is. Dan zou je kunnen zeggen dat elke G die niet meer dan voor een klein aantal van de waarheidswaarden verschilt van G_{opt} op de optimale geloofsfixatie lijkt. Dit zou een intuïtieve explicitering kunnen zijn van ' G lijkt op G_{opt} '. Nu blijkt dat het vinden van

een G die lijkt op G_{opt} ook NP-moeilijk is. In andere woorden, er bestaan weldegelijk NP-moeilijke problemen die niet makkelijk te benaderen zijn, zelfs als we een redelijke definitie geven van wat een benadering zou kunnen zijn.

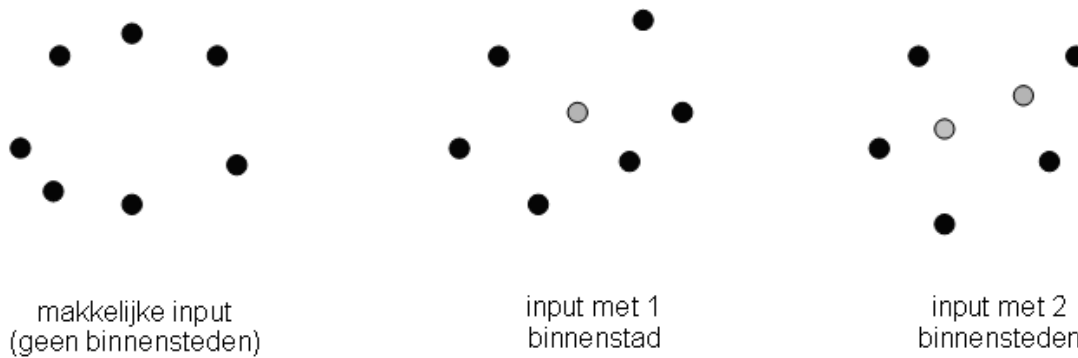
Bronnen van Complexiteit

Wat alle mythen over NP-moeilijkheid lijken te willen doen is één verklaring bieden voor waarom alle (of veel) NP-moeilijke problemen moeilijk zijn. Een probleemspecifieke benadering lijkt echter veel vruchtbaarder. Het antwoord op de vraag 'Wat maakt een NP-moeilijk probleem Q moeilijk?', is misschien wel anders wanneer Q het handelsreizigersprobleem is dan wanneer Q het constraint satisfaction probleem (CSP) is. Als we de vraag op een probleemspecifieke manier benaderen kunnen we mogelijk ook meer inzicht krijgen in welke veranderingen aan een NP-moeilijk probleem Q het makkelijk zouden kunnen maken.

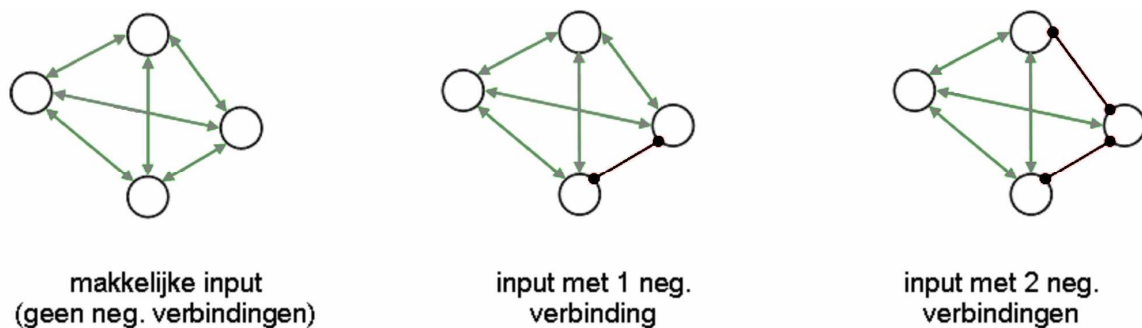
Om een wiskundige benadering mogelijk te maken, stel ik voor om de vraag 'Wat maakt een NP-moeilijk probleem Q moeilijk?' te herformuleren naar: 'Welk aspect van Q is een bron voor de exponentiele complexiteit inherent in het probleem?' Een aspect van een probleem wordt ook wel een *parameter* genoemd. Zo heeft het handelsreizigersprobleem diverse parameters, waaronder bijvoorbeeld het aantal punten aan de buitenste rand van de set van steden, g (voor *grenssteden*), en het aantal punten binnen de rand, b (voor *binnensteden*). Deze twee parameters zijn in principe onafhankelijk van elkaar te manipuleren, waarbij natuurlijk wel $g + b = n$ = het totaal aantal steden. Het constraint satisfaction probleem heeft ook diverse parameters, waaronder het aantal samenhangende ideeënparen, s , en het aantal elkaar tegensprekende ideeënparen, t . Ook deze twee parameters zijn onafhankelijk van elkaar te manipuleren gegeven de beperking dat $s + t = n$ = het totaal aantal ideeënparen.

We zeggen dat een parameter een 'bron van complexiteit' is voor een NP-moeilijk probleem Q , als het mogelijk is om Q op te lossen in een tijd die alleen snel (lees: exponentieel) groeit in de grootte van de parameter, en verder langzaam (lees: polynomiaal) groeit met de rest van de input.⁶ Een voorbeeld hiervan is een tijd van orde $2^p \cdot n^2$. In zo'n geval is het enkel de parameter p die verantwoordelijk is voor de complexiteit inherent in het probleem. Het is dan ook meteen duidelijk welke aanpassing van het probleem het makkelijk zou maken: beperk het probleem tot situaties waarin de parameter p altijd relatief klein is en het is makkelijk op te lossen!

⁶ Dit idee is gebaseerd op een wiskundige theorie, genaamd *parameterized complexity*, waarvoor Rod Downey en Mike Fellows in de jaren 90 de grondslagen hebben gelegd. Het belang van deze theorie voor de cognitiewetenschap wordt ook beschreven in van Rooij (2008).



Figuur 3. Illustratie van verschillende inputs voor het handelsreizigersprobleem. De inputs bestaan ieder uit 7 steden, maar variëren van 0 tot 2 binnensteden (grijs) en van 7 tot 5 grenssteden (zwart). Inputs zonder binnensteden zijn triviaal: de optimale route zal altijd de grenssteden in volgorde aflopen.



Figuur 4. Illustratie van verschillende inputs voor het constraint satisfaction probleem. De inputs bestaan ieder uit 4 knopen, maar variëren van 0 tot 2 negatieve verbindingen (rood) en van 6 tot 4 positieve verbindingen (groen). Inputs zonder negatieve verbindingen zijn triviaal: de optimale geloofsfixatie kent altijd aan alle knopen de waarheidswaarde 'waar' toe.

Voorbeelden

Dat de voorgestelde benadering interessante antwoorden oplevert zal ik nu illustreren aan de hand van de twee eerder genoemde voorbeelden.

Het handelsreizigersprobleem is op te lossen in een tijd van orde $b! \cdot n^2$ (waarbij b het aantal binnensteden is en n het totaal aantal steden).⁷ De parameter b is dus een bron van complexiteit voor het handelsreizigersprobleem. Hieruit kunnen we afleiden dat het handelsreizigersprobleem, in het algemeen, moeilijk is omdat b groot kan zijn. Immers, als b altijd klein zou zijn (we hebben dan te maken met een beperkte inputruimte), dan zou het handelsreizigersprobleem makkelijk zijn.

⁷ Zie Deineko *et al.* (2004) voor een bewijs.

Het constraint satisfactionprobleem is op te lossen in een tijd van orde $2^{t+1} \cdot n^2$ (waarbij t het aantal negatieve connecties is).⁸ De parameter t is dus een bron van complexiteit voor het constraint satisfactionprobleem. Zolang die ene parameter maar klein genoeg blijft is het probleem altijd makkelijk op te lossen. Deze bevinding leidt tevens tot een interessante voorspelling die wellicht door neurowetenschappers getoetst kan worden: Geloofsfixatie is volgens het CSP model alleen moeilijk voor breinen met veel ideeën die elkaar tegenspreken en makkelijk voor breinen met veel ideeën die met elkaar samenhangen.

En dus ...?

In een notendop, kunnen we nu het volgende concluderen:

1. Lopende debatten in de cognitiewetenschap maken gebruik van misvattingen over NP-moeilijkheid. De argumenten voor de standpunten zijn daardoor ongefundeerd.
2. Standpunten zouden gebaseerd moeten worden op wat een NP-moeilijk probleem *echt* moeilijk of makkelijk maakt. Dit lijkt een probleemspecifieke benadering te vereisen.

Een probleemspecifieke benadering zal de richting waarin de debatten zich ontwikkelen drastisch kunnen veranderen. Bijvoorbeeld, rationele of optimalisatiemodellen en niet-modulaire architecturen kunnen dan niet meer in het algemeen worden verworpen omdat ze allemaal NP-moeilijk zouden zijn; mogelijk kunnen sommige worden verworpen en andere niet, dat zal per geval moeten worden nagegaan. Tevens kan niet meer aangenomen worden dat alle heuristieken, satisficing modellen en benaderingen vanzelfsprekend makkelijk zijn; er zal voor elk specifiek geval apart bekeken moeten worden of het NP-moeilijk is of niet.

De probleemspecifieke benadering die ik voorstel maakt het doen van algemene uitspraken een stuk moeilijker, maar niettemin zal het volgens mij het computationeel modelleren van cognitie makkelijker maken.

Literatuur

- Carruthers, P. (2003). On Fodor's problem. *Mind and Language*, 18, 502–523.
- Cherniak, C. (1986). *Minimal rationality*. MIT Press.
- Deineko, V.G., Hoffman, M., Okamoto, Y. & Woeginger, G.J. (2004). The traveling salesman problem with few inner points. In K.-Y. Chwa and J.O. Munro (Eds.), *Computing and Combinatorics* (LNCS 3106). Berlin: Springer-Verlag.
- Downey, R. G., & Fellows, M. R. (1999). *Parameterized complexity*. New York: Springer-Verlag.

⁸ Zie van Rooij (2003) voor een bewijs.

- Gigerenzer, G. (2008). Why heuristics work. *Perspectives on Psychological Science*, 3, 20-29.
- Gigerenzer, G., Todd, P.M., & The ABC Research Group (1990). Simple heuristics that make us smart. Oxford: Oxford University Press.
- Kahneman, D. Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Simon, H. A. (1957). *Models of man: Social and rational*. New York: Wiley.
- Thagard, P. (2000). *Coherence in thought and action*. Cambridge, MA: MIT Press.
- van Rooij, I. (2008). The Tractable Cognition thesis. *Cognitive Science*, 32, 939-984.
- van Rooij, I. (2003). *Tractable cognition: Complexity theory in cognitive psychology*. Unpublished PhD thesis. University of Victoria, BC, Canada.